УДК 519.872

ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ MMPP|M|1 МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАГРУЗКИ

А.А. Назаров, Е. А. Моисеева

Томский государственный университет
E-mail: moiskate@mail.ru

Исследована математическая модель системы MMPP|M|1 с источником повторных вызовов методом асимптотического анализа в условии большой загрузки. Полученные распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов были сравнены численно с допредельным распределением, полученным численными методами, что показало приемлемость использования предложенного асимптотического метода.

Ключевые слова:
Система массового обслуживания с источником повторных вызовов, источник повторных вызовов, метод асимптотического анализа, большая загрузка.

Key words:
Retrial queuing system, source of repeated calls (orbit), method of asymptotic analysis, heavy load.

В теории массового обслуживания, как правило, выделяли и исследовали два класса систем: системы с ожиданием и системы с потерями. В последнее время выделяют новый класс систем массового обслуживания – системы с источником повторных вызовов (или Retrial Queueing System). Такие системы характеризуются ситуациями повторных обращений требований к обслуживающему прибору после осуществления случайной задержки.

Первые системы такого рода были рассмотрены Р.И. Вилкинсоном [1] и Дж. Коэном [2]. Основные подходы к описанию систем с повторными вызовами были описаны Г. Гоштони [3], А. Элдином [4]. Наиболее полное и глубокое исследование разнообразных процессов в системах с повторными вызовами проведено в работах Г.И. Фалина [5] и Дж.Р. Артолехо [6].

Многие из поставленных задач в таких моделях систем массового обслуживания (СМО) решались численно [7, 8], в данной же работе применяется альтернативный способ их решения – метод асимптотического анализа.

Асимптотические методы применялись такими математиками, как Д. И. Бурман и Д. Р. Смит [9], А.А. Назаров [10], В.В. Анисимов [11], А.А. Боровков [12] и др.

В реальной жизни мы часто сталкиваемся с ситуациями повторного обращения заявок к обслуживающему прибору. В качестве примера опишем однолинейную RQ-систему на примере некоторой организации. Предположим, что на телефон (единственный) некоторого учреждения в случайном порядке поступают вызовы. Это может быть касса кинотеатра, регистратура в больнице или, к примеру, справочное бюро. Если в момент поступления вызова телефон свободен, то абонент обслуживается (принимается заказ на бронирование билета, происходит запись к врачу, предоставляется какая-либо информация), при этом в общем случае разговор длится случайное время. Если же телефон занят, клиент через некоторое время пытается повторно дозвониться в фирму. Так как содержание каждого обслуживающего прибора (телефона, работника) связано с затратами организации, но и необслуживание требований наносит определенный вред организации, то возникает вопрос о нахождении некоторого оптимального числа работников (т. е. приборов) и длительности обслуживания клиентов. Нередко бывает, что такие системы массового обслуживания имеют достаточно высокую загрузку, особенно при наличии лишь одного обслуживающего прибора. Поэтому результаты исследования систем массового обслуживания крайне важны для практической деятельности некоторых экономических объектов.

Описание модели

Рассмотрим (рис. 1) однолинейную RQ-систему с источником повторных вызовов (ИПВ), на вход которой поступает MMPP-поток заявок с матрицей условных интенсивностей $\rho\boldsymbol{\lambda}$ и матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}$ [10], время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ. Если поступившая заявка застает прибор свободным, то она занимает его для обслуживания. Если прибор занят, то заявка переходит в ИПВ, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к обслуживающему прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его для обслуживания, в противном случае заявка мгновенно возвращается в источник повторных вызовов для реализации следующей задержки.

Пусть $i(t)$ – случайный процесс, характеризующий число заявок в ИПВ, $n(t)$ – цепь Маркова, управляющая MMPP-потоком, а $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t)=\begin{cases}0, \text{ если прибор свободен},\\ 1, \text{ если прибор занят.}\end{cases}$$

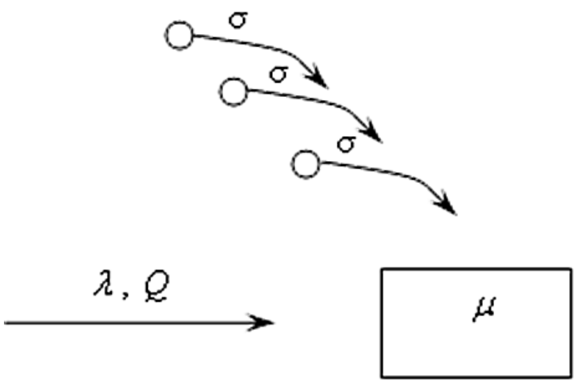

Рис. 1. *RQ-система MMPP|M|1*

Обозначим $P\{k(t)=k,i(t)=i,n(t)=n\}=P(k,i,n,t)$ вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии k, управляющая MMPP-потоком цепь Маркова – в состоянии n, и в источнике повторных вызовов находится i заявок.

Тогда процесс $\{k(t),i(t),n(t)\}$ изменения состояний данной системы во времени является марковским. Ставится задача найти распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов такой системы.

Исследование RQ-системы MMPP|M|1 в условии большой загрузки

Для получения распределения вероятностей $P(k,i,n,t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P(0,n,i,t)}{\partial t}=\mu P(1,n,i,t)-\\ -(\rho\lambda_n+i\sigma-q_{nn})P(0,n,i,t)+\sum\limits_{v\neq n}P(0,v,i,t)\cdot q_{vn},\\ \dfrac{\partial P(1,n,i,t)}{\partial t}=-(\rho\lambda_n+\mu-q_{nn})P(1,n,i,t)+\\ +\rho\lambda_n P(0,n,i,t)+\rho\lambda_n P(1,n,i-1,t)+\\ +\sigma(i+1)\cdot P(0,n,i+1,t)+\sum\limits_{v\neq n}P(1,v,i,t)\cdot q_{vn}.\end{cases} \qquad (1)$$

Обозначим векторы-строки

$$\mathbf{P}(k,i)=\{P(k,1,i)P(k,2,i)...P(k,N,i)\},$$

где в стационарном режиме $P(k,i,n,t)=P(k,i,n)$. Тогда в матричном виде система (1) примет вид:

$$\begin{cases}\mathbf{P}(0,i)(\mathbf{Q}-\rho\boldsymbol{\lambda}-i\sigma\cdot\mathbf{I})+\mu\mathbf{P}(1,i)=0,\\ \mathbf{P}(1,i)(\mathbf{Q}-\rho\boldsymbol{\lambda}-\mu\mathbf{I})+\mathbf{P}(0,i)\rho\boldsymbol{\lambda}+\\ +\mathbf{P}(1,i-1)\rho\boldsymbol{\lambda}+\sigma(i+1)\cdot\mathbf{P}(0,i+1)=0,\end{cases} \qquad (2)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

Получили систему двух матричных уравнений в конечных разностях.

Пусть параметры системы таковы, что выполняется:

$$\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{E}=\mu, \qquad (3)$$

где $\mathbf{E}$ – единичный вектор-столбец, $\mathbf{R}$ – распределение вероятностей значения цепи Маркова, управляющей входящим MMPP-потоком, которое определяется следующим образом:

$$\begin{cases}\mathbf{RQ}=0,\\ \mathbf{RE}=1.\end{cases} \qquad (4)$$

Перейдем в системе (2) к характеристическим функциям: $\mathbf{H}(k,u)=\sum\limits_i e^{jui}\mathbf{P}(k,i)$, где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица. Тогда система уравнений (2) для характеристических функций перепишется в виде:

$$\begin{cases}\mathbf{H}(0,u)(\mathbf{Q}-\rho\boldsymbol{\lambda})+j\sigma\dfrac{\partial}{\partial u}\mathbf{H}(0,u)+\mu\mathbf{H}(1,u)=0,\\ \mathbf{H}(1,u)(\mathbf{Q}-\rho\boldsymbol{\lambda}-\mu\mathbf{I})+\mathbf{H}(0,u)\rho\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{H}(1,u)\rho\boldsymbol{\lambda}e^{ju}-\\ -j\sigma e^{-ju}\cdot\dfrac{\partial}{\partial u}\mathbf{H}(0,u)=0.\end{cases} \qquad (5)$$

Решим систему (5) методом асимптотического анализа в условии большой загрузки. Условием большой загрузки будем называть предельное соотношение $\rho\uparrow 1$ или, введя бесконечно малую величину $\varepsilon=1-\rho>0$, оно может быть описано условием: $\varepsilon\downarrow 0$.

Обозначим $u=\varepsilon w$, $\mathbf{H}(0,u)=\varepsilon\mathbf{G}(w,\varepsilon)$, $\mathbf{H}(1,u)=\mathbf{F}(w,\varepsilon)$. Тогда система (5) примет вид:

$$\begin{cases}\varepsilon\mathbf{G}(w,\varepsilon)(\mathbf{Q}-(1-\varepsilon)\text{л})+j\sigma\dfrac{\partial}{\partial w}\mathbf{G}(w,\varepsilon)+\\ +\mu\mathbf{F}(w,\varepsilon)=0,\\ \mathbf{F}(w,\varepsilon)(\mathbf{Q}+(1-\varepsilon)(e^{j\varepsilon w}-1)\boldsymbol{\lambda}-\mu\mathbf{I})+\\ +\varepsilon(1-\varepsilon)\mathbf{G}(w,\varepsilon)\boldsymbol{\lambda}-j\sigma e^{-j\varepsilon w}\dfrac{\partial}{\partial w}\mathbf{G}(w,\varepsilon)=0.\end{cases} \qquad (6)$$

<u>Теорема</u>. Предельное значение $\mathbf{F}(w)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F}(w,\varepsilon)$ первой компоненты решения $\{\mathbf{F}(w,\varepsilon),\mathbf{G}(w,\varepsilon)\}$ системы (6) имеет вид

$$\mathbf{F}(w)=\mathbf{R}\cdot\Phi(w), \qquad (7)$$

где вектор $\mathbf{R}$ определяется системой уравнений (4), а скалярная функция $\Phi(w)$ имеет вид характеристической функции

$$\Phi(w)=\left(1-\frac{jw}{\beta}\right)^{-\alpha} \qquad (8)$$

гамма-распределения с параметрами α и β, определяемыми равенствами

$$\beta=\frac{\mu}{\mu+\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E},\quad \alpha=1+\frac{\mu}{\sigma}\beta, \qquad (9)$$

в которых вектор $\mathbf{V}$ является решением неоднородной системы

$$\mathbf{VQ}=\mathbf{R}(\mu\mathbf{I}-\text{л}). \qquad (10)$$

<u>Доказательство</u>

В (6) совершим предельный переход при $\varepsilon\downarrow 0$, обозначив $\mathbf{F}(w)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F}(w,\varepsilon)$ и $\mathbf{G}(w)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{G}(w,\varepsilon)$. Получим:

$$\begin{cases}j\sigma\mathbf{G}'(w)=-\mu\mathbf{F}(w),\\ \mathbf{F}(w)\mathbf{Q}=0.\end{cases} \qquad (11)$$

Запишем следующее разложения функций:

$$\mathbf{G}(w,\varepsilon)=\mathbf{G}(w)+\varepsilon\cdot\mathbf{g}(w)+O(\varepsilon^2), \qquad (12)$$

$$\mathbf{F}(w,\varepsilon)=\mathbf{F}(w)+\varepsilon\cdot\mathbf{f}(w)+O(\varepsilon^2), \qquad (13)$$

где $O(\varepsilon^2)$ – бесконечно малая величина порядка ε^2.

Подставим разложения (12), (13) в систему (6). В результате несложных преобразований запишем следующую систему:

$$\begin{cases}\varepsilon\mathbf{G}(w)(\mathbf{Q}-(1-\varepsilon)\boldsymbol{\lambda})+\varepsilon^2\cdot\mathbf{g}(w)(\mathbf{Q}-(1-\varepsilon)\boldsymbol{\lambda})+\\ +j\sigma\mathbf{G}'(w)+\varepsilon j\sigma\cdot\mathbf{g}'(w)+\mu\mathbf{F}(w)+\varepsilon\cdot\mu\mathbf{f}(w)=O(\varepsilon^2)\\ \mathbf{F}(w)(\mathbf{Q}-(1-\varepsilon)\boldsymbol{\lambda}-\mu\mathbf{I})+\varepsilon\cdot\mathbf{f}(w)(\mathbf{Q}-(1-\varepsilon)\boldsymbol{\lambda}-\mu\mathbf{I})+\\ +\varepsilon\mathbf{G}(w)(1-\varepsilon)\boldsymbol{\lambda}+\varepsilon^2\cdot\mathbf{g}(w)(1-\varepsilon)\boldsymbol{\lambda}+\\ +\mathbf{F}(w)(1-\varepsilon)\boldsymbol{\lambda}(1+j\varepsilon w)+\varepsilon\cdot f(w)(1-\varepsilon)\boldsymbol{\lambda}(1-j\varepsilon w)-\\ -j\sigma(1-j\varepsilon w)\cdot\mathbf{G}'(w)-\varepsilon j\sigma(1-j\varepsilon w)\cdot\mathbf{g}'(w)=O(\varepsilon^2).\end{cases}$$

Учитывая (11), разделив на ε и совершив предельный переход при $\varepsilon\downarrow 0$, получим:

$$\begin{cases}\mathbf{G}(w)(\mathbf{Q}-\boldsymbol{\lambda})+j\sigma\cdot\mathbf{g}'(w)+\mu\mathbf{f}(w)=0\\ \mathbf{f}(w)(\mathbf{Q}-\mu\mathbf{I})+\mathbf{G}(w)\boldsymbol{\lambda}+jw\mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}+\\ +j\sigma jw\cdot\mathbf{G}'(w)-j\sigma\cdot\mathbf{g}'(w)=0.\end{cases} \qquad (14)$$

Сложим матричные уравнения системы (6) и домножим их на единичный вектор-столбец $\mathbf{E}$ (таким образом суммируя все скалярные составляющие уравнения системы). Учитывая, что $\mathbf{QE}=0$, получим:

$$\mathbf{F}(w,\varepsilon)(1-\varepsilon)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}+j\sigma e^{-j\varepsilon w}\frac{\partial\mathbf{G}(w,\varepsilon)}{\partial w}\mathbf{E}=0.$$

Подставим разложения (12), (13):

$$\mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}E+\varepsilon\cdot\mathbf{f}(w)\boldsymbol{\lambda}E-\varepsilon\mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}E+j\sigma\cdot\mathbf{G}'(w)\mathbf{E}+$$
$$+j\sigma\varepsilon\cdot\mathbf{g}'(w)\mathbf{E}-j\sigma j\varepsilon w\cdot\mathbf{G}'(w)\mathbf{E}=O(\varepsilon^2). \qquad (15)$$

Устремив $\varepsilon\downarrow 0$, запишем следующее равенство:

$$\mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}E+j\sigma\mathbf{G}'(w)\mathbf{E}=0. \qquad (16)$$

Учитывая (16), равенство (15) перепишется в виде:

$$\varepsilon\cdot\mathbf{f}(w)\boldsymbol{\lambda}E-\varepsilon\mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}E+j\sigma\varepsilon\cdot\mathbf{g}'(w)\mathbf{E}-$$
$$-j\sigma j\varepsilon w\cdot\mathbf{G}'(w)\mathbf{E}=O(\varepsilon^2).$$

Разделив уравнение на ε и совершив предельный переход при $\varepsilon\downarrow 0$, запишем

$$\mathbf{f}(w)\boldsymbol{\lambda}E-\mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}E+j\sigma\cdot\mathbf{g}'(w)\mathbf{E}-$$
$$-j\sigma jw\cdot\mathbf{G}'(w)\mathbf{E}=0. \qquad (17)$$

Объединив (11), (14), (16) и (17), получим следующую систему четырех матричных и двух скалярных уравнений:

$$\begin{cases}j\sigma\mathbf{G}'(w)=-\mu\mathbf{F}(w),\\ \mathbf{F}(w)\mathbf{Q}=0,\\ \mathbf{G}(w)(\mathbf{Q}-\boldsymbol{\lambda})+j\sigma\mathbf{g}'(w)+\mu\mathbf{f}(w)=0,\\ \mathbf{f}(w)(\mathbf{Q}-\mu\mathbf{I})+\mathbf{G}(w)\boldsymbol{\lambda}+jw\mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}+\\ +j\sigma jw\cdot\mathbf{G}'(w)-j\sigma\cdot\mathbf{g}'(w)=0,\\ \mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}E+j\sigma\mathbf{G}'(w)\mathbf{E}=0,\\ \mathbf{f}(w)\boldsymbol{\lambda}E-\mathbf{F}(w)\boldsymbol{\lambda}E+j\sigma\cdot\mathbf{g}'(w)\mathbf{E}-\\ -j\sigma jw\cdot\mathbf{G}'(w)\mathbf{E}=0.\end{cases} \qquad (18)$$

Из 2-го уравнения полученной системы (18) можно записать равенство, совпадающее с (7):

$$\mathbf{F}(w)=\mathbf{R}\cdot\Phi(w),$$

где $\mathbf{F}(w)\mathbf{E}=\Phi(w)\mathbf{RE}=\Phi(w)$.

Тогда из 1-го уравнения системы (18) можно записать следующее равенство:

$$\mathbf{G}'(w)=j\frac{\mu}{\sigma}\mathbf{F}(w)=j\frac{\mu}{\sigma}\mathbf{R}\cdot\Phi(w). \qquad (19)$$

Суммируя 3-е и 4-е уравнения системы (18), получим

$$\{\mathbf{G}(w)+\mathbf{f}(w)\}\mathbf{Q}+jw\mathbf{F}(w)\boldsymbol{\text{л}}+j\sigma jw\cdot\mathbf{G}'(w)=0.$$

Учитывая (19), несложно показать, что выполняется равенство:

$$\{\mathbf{G}(w)+\mathbf{f}(w)\}\mathbf{Q}=-jw\mathbf{R}\Phi(w)\{\boldsymbol{\text{л}}-\mu\mathbf{I}\}. \qquad (20)$$

Пусть $\mathbf{G}(w)+\mathbf{f}(w)=jw\Phi(w)\mathbf{V}$, где $\mathbf{V}$ – некоторый вектор, для которого выполняется равенство, совпадающее с (10):

$$\mathbf{VQ}=\mathbf{R}(\mu\mathbf{I}-\boldsymbol{\lambda}).$$

Для того чтобы существовало решение такой системы, необходимо, чтобы ранг расширенной матрицы был равен рангу матрицы системы $\mathbf{Q}$. Так как определитель $|\mathbf{Q}|=0$, то и ранг расширенной матрицы должен быть меньше размерности системы. Тогда достаточно выполнения следующего условия:

$$(\mu\mathbf{R}-\mathbf{R}\boldsymbol{\lambda})\mathbf{E}=0,$$

что справедливо в силу (3).

Тогда решение системы (10) можно представить в виде:

$$\mathbf{V}=C\mathbf{R}+\mathbf{V}_0,$$

где C – произвольная постоянная, $\mathbf{V}_0$ – частное решение системы, которое можно найти накладывая некоторые начальные условия, например $\mathbf{VE}=0$.

Таким образом, из (20) можно записать.

$$\mathbf{f}(w)=jw\Phi(w)\cdot\mathbf{V}-\mathbf{G}(w). \qquad (21)$$

Из 3-го уравнения системы (18), получим:

$$j\sigma\mathbf{g}'(w)=-\mathbf{G}(w)(\mathbf{Q}-\boldsymbol{\lambda})-\mu\mathbf{f}(w).$$

Подставим в это выражение (20):

$$j\sigma\mathbf{g}'(w)=\mathbf{G}(w)(\boldsymbol{\text{л}}-\mathbf{Q}+\mu\mathbf{I})-\mu jw\Phi(w)\cdot\mathbf{V}. \qquad (22)$$

Суммируем 5-е и 6-е уравнения в системе (18):

$$\mathbf{f}(w)\boldsymbol{\lambda}E+j\sigma\cdot\mathbf{g}'(w)\mathbf{E}+j\sigma(1-jw)\mathbf{G}'(w)\mathbf{E}=0.$$

Подставим в это равенство полученные ранее формулы (21), (22):

$$[jw\Phi(w)\cdot\mathbf{V}-\mathbf{G}(w)]\cdot\boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}+$$
$$+[\mathbf{G}(w)(\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{Q}+\mu\mathbf{I})-\mu jw\Phi(w)\cdot\mathbf{V}]\cdot\mathbf{E}+$$
$$+j\sigma(1-jw)\mathbf{G}'(w)\mathbf{E}=0,$$

$$jw\Phi(w)\cdot\mathbf{V}(\boldsymbol{\lambda}-\mu\mathbf{I})\mathbf{E}+$$
$$+j\sigma(1-jw)\mathbf{G}'(w)\mathbf{E}+\mathbf{G}(w)\mu=0.$$

Продифференцируем последнее выражение:

$$j\Phi(w)\mathbf{V}(\boldsymbol{\lambda}-\mu\mathbf{I})\mathbf{E}+jw\Phi'(w)\mathbf{V}(\boldsymbol{\lambda}-\mu\mathbf{I})\mathbf{E}+$$
$$+\sigma\mathbf{G}'(w)\mathbf{E}+j\sigma(1-jw)\mathbf{G}''(w)\mathbf{E}+\mathbf{G}'(w)\mu=0. \qquad (23)$$

Продифференцировав (19) и подставив полученное выражение в (23), в ходе простых преобразований получим:

$$\Phi(w)\cdot\begin{bmatrix} j\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E - j\mu\mathbf{VE} + j\mu\mathbf{RE} + \\ +j\dfrac{\mu^2}{\sigma}\mathbf{RE} - j\dfrac{\mu}{\sigma}\mathbf{RQE} \end{bmatrix} +$$

$$+\Phi'(w)\cdot[jw\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E - jw\mu\mathbf{VE} - \mu\mathbf{RE} + jw\mu\mathbf{RE}] = 0.$$

Учитывая условия (4), последнее выражение запишется в следующем виде:

$$\Phi(w)\cdot\left[j\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E - j\mu\mathbf{VE} + j\mu + j\frac{\mu^2}{\sigma}\right] =$$

$$= \Phi'(w)\cdot[-jw\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E + jw\mu\mathbf{VE} + \mu - jw\mu]. \quad (25)$$

Введем обозначения:

$$\beta = \frac{\mu}{\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E - \mu\mathbf{VE} + \mu}, \quad \alpha = 1 + \frac{\mu^2}{\sigma(\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E - \mu\mathbf{VE} + \mu)}.$$

Тогда формула (25) перепишется в виде:

$$\Phi(w)\cdot j\alpha = \Phi'(w)\cdot[\beta - jw].$$

Решение такого уравнения имеет вид:

$$\Phi(w) = C\cdot[w + j\beta]^{-\alpha}, \quad (26)$$

где C – произвольная постоянная, которая из условия $\Phi(0)=1$ равна $C=[j\beta]^{\alpha}$.

Подставив значение константы в (26), получим формулу (8) из условия теоремы:

$$\Phi(w) = \left[1 - \frac{jw}{\beta}\right]^{-\alpha}.$$

Замечание. На множестве решений $\mathbf{V}=C\mathbf{R}+\mathbf{V}_0$ неоднородной системы линейных алгебраических уравнений (9) параметры α и β гамма-распределения не зависят от значений постоянной C.

Доказательство

Рассмотрим выражение $\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E-\mu\mathbf{VE}+\mu$. Подставим в него множество решений $\mathbf{V}=C\mathbf{R}+\mathbf{V}_0$, тогда, учитывая условия (3) и (6), получим:

$$\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E - \mu\mathbf{VE} + \mu = \mathbf{V}_0\boldsymbol{\lambda}E - \mu\mathbf{V}_0\mathbf{E} + \mu.$$

Следовательно, выражение $\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E-\mu\mathbf{VE}+\mu$, зависит только от частного решения системы (9). Выберем такое решение, для которого выполняется $\mathbf{VE}=0$.

Тогда параметры α и β гамма-распределения примут следующий вид:

$$\beta = \frac{\mu}{\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E + \mu}, \quad \alpha = 1 + \frac{\mu}{\sigma}\beta.$$

Возвращаясь к (7), можно записать равенство:

$$\mathbf{F}(w) = \mathbf{R}\left(1 - \frac{jw}{\beta}\right)^{-\alpha}.$$

Сделав обратные замены $w=u/\varepsilon$ и $\varepsilon=1-\rho$, получим, что асимптотическая характеристическая функция имеет вид

$$h(u) = \mathbf{F}(w)\mathbf{E} = \mathbf{F}[u/\varepsilon]\mathbf{E} =$$

$$= \mathbf{F}\left[\frac{u}{1-\rho}\right]\mathbf{E} = \left[1 - \frac{ju}{\beta(1-\rho)}\right]^{-\alpha}$$

характеристической функции гамма-распределения с параметрами α и β, где

$$\beta = \frac{\mu}{\mathbf{V}\boldsymbol{\lambda}E + \mu}, \quad \alpha = 1 + \frac{\mu}{\sigma}\beta.$$

Асимптотическое распределение вероятностей $P(i)$, характеристическая функция которого равна $h(u) = \left(1 - \dfrac{ju}{\beta(1-\rho)}\right)^{-\alpha}$, может также быть найдено с помощью обратного преобразования Фурье, либо используя свойства гамма-распределения.

Сравним между собой полученное асимптотическое распределение $P(i)$ и распределения $R(i)$, полученное решением системы (2) численными методами.

Сравнение асимптотического и допредельного распределений

С помощью математического пакета MathCad было численно реализовано вычисление распределения вероятностей числа заявок в ИПВ $i=\overline{0,100}$, полученных с помощью асимптотического анализа, для различных значений параметров λ, Q, σ, ρ, μ. На графиках было проиллюстрировано расхождение между допредельным и асимптотическим распределениями. Приведем примеры для нескольких случаев.

Рассмотрим случай, когда параметры принимают следующие значения:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & -0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & -0{,}5 \end{pmatrix},$$

$$\rho = 0{,}9, \quad \sigma = 1, \quad \mu = 1.$$

На рис. 2 изображены полученные распределения вероятностей $R(i)$ и $P(i)$, числа заявок i в ИПВ.

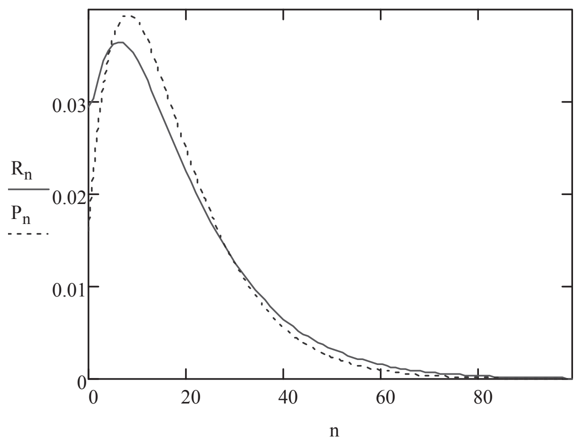

Рис. 2. *Расхождение между распределениями при $\rho=0{,}9$, $\sigma=1$, $\mu=1$*

Рассмотрим случай, когда $\rho=0{,}9$, $\sigma=2$, $\mu=1$. На рис. 3 изображены полученные распределения вероятностей $R(i)$ и $P(i)$, числа заявок i в ИПВ.

Определим расстояние Колмогорова между распределениями для каждого из приведенных случаев:

$$\Delta = \max_{0\le i<\infty} \left| \sum_{\nu=0}^{i} R(\nu) - \sum_{\nu=0}^{i} P(\nu) \right|.$$

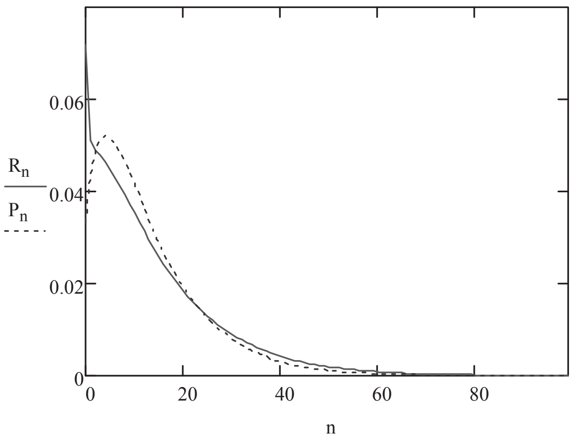

Рис. 3. *Расхождение между распределениями при ρ=0,9, σ=2, μ=1*

Представим для наглядности полученные результаты в виде таблицы.

Таблица. *Расхождения между асимптотическим и допредельным распределениями*

Значения параметров системы	Расстояние Колмогорова
ρ=0,9, σ=2, μ=1	Δ=0,046
ρ=0,9, σ=1, μ=1	Δ=0,033

Заключение

В работе была исследована математическая модель системы MMPP|M|1 с источником повторных вызовов методом асимптотического анализа в условии большой загрузки. Полученные распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов были численно сравнены с допредельными результатами численных алгоритмов. Из чего можно вывод, что предлагаемый асимптотический метод количественно дает удовлетворительные результаты при ρ=0,9: погрешность аппроксимации не превышает 5 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wilkinson R.I. Theories for toll traffic engineering in the USA // The Bell System Technical Journal. – 1956. – V. 35. – № 2. – P. 421–507.
2. Коэн Дж., Бонсма О. Граничные задачи в теории массового обслуживания / Пер. с англ. А.Д. Вайнштейна. – М.: Мир, 1987. – 272 с.
3. Гоштони Г. Сравнение вычисленных и моделированных результатов для пучков соединительных линий при наличии повторных попыток установления связи // Материалы VIII ITC. – Сидней, 1977. – № 1. – С. 1–16.
4. Эллдин А. Подход к теоретическому описанию повторных попыток вызова // Ericssion Technics, 1967. – Т. 23 – № 3. – С. 345–407.
5. Falin G.L., Templeton J.G.C. Retrial queues. – London: Chapman & Hall, 1997. – 328 p.
6. Artolejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. – Berlin: Springer, 2008. – 267 p.
7. Дудин А.Н. Об одной системе с повторными вызовами и изменяемым режимом работы / ред. журн. «Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – М., 1985. – 10 с. – Деп. в ВИНИТИ 10.01.1985, № 10293–85.
8. Дудин А.Н., Медведев Г.А., Меленец Ю.В. Практикум на ЭВМ по теории массового обслуживания. Учебное пособие – Мн.: «Электронная книга БГУ», 2003. – 166 с.
9. Burman D.Y., Smith D.R. An asymptotic analysis of a queueing system with Markov modulated arrivals // Operations Research. – 1986. –V. 34. – P. 105–119.
10. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
11. Анисимов В.В., Закусилко О.К., Донченко В.С. Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем. – Киев: Вишща школа, 1987. – 247 с.
12. Боровков А.А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1980. – 381 с.

Поступила 20.11.2012 г.